法律声明

- 本课件包括演示文稿、示例、代码、题库、视频和声音等内容，小象学院和主讲老师拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意及内容，我们保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

隐马尔科夫模型

小象学院 ChinaHadoop.cn

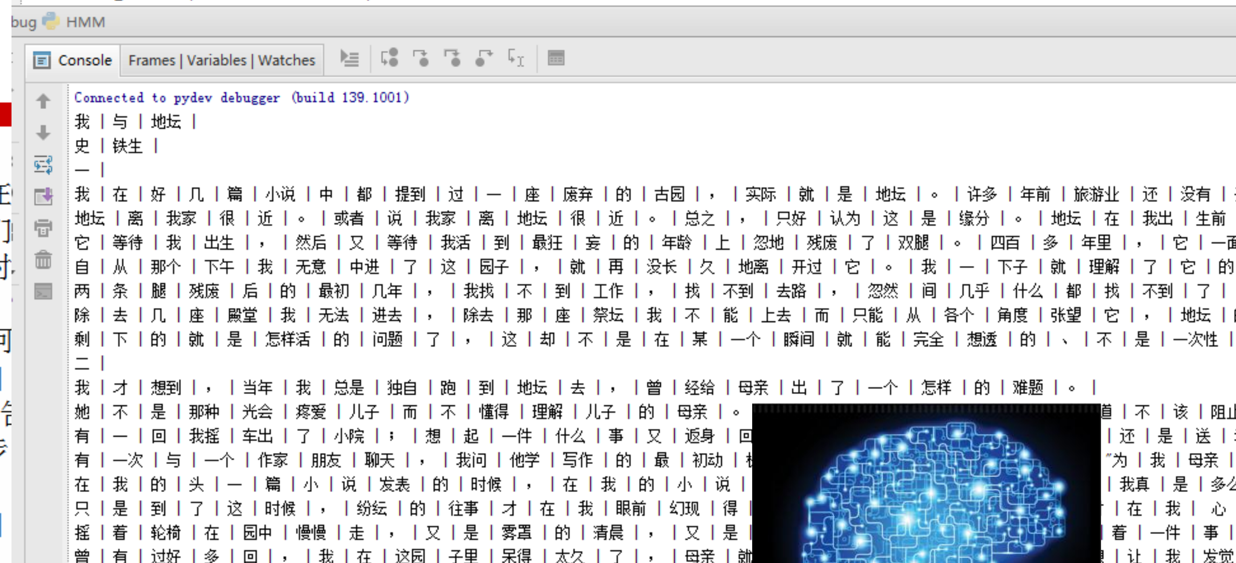
邹博

主要内容

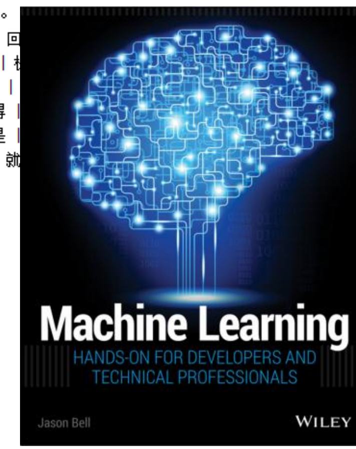
- 隐马尔科夫模型
  - 概率计算
  - 参数估计
  - 模型预测
- 中文分词算法实践
  - 思考：实践问题应该如何建模？

中文分词

```python
if __name__ == "__main__":
    pi, A, B = load_train()
    f = file(".\\text\\novel.txt")
    data = f.read()[3:].decode('utf-8')
    f.close()
    decode = viterbi(pi, A, B, data)
    segment(data, decode)
```

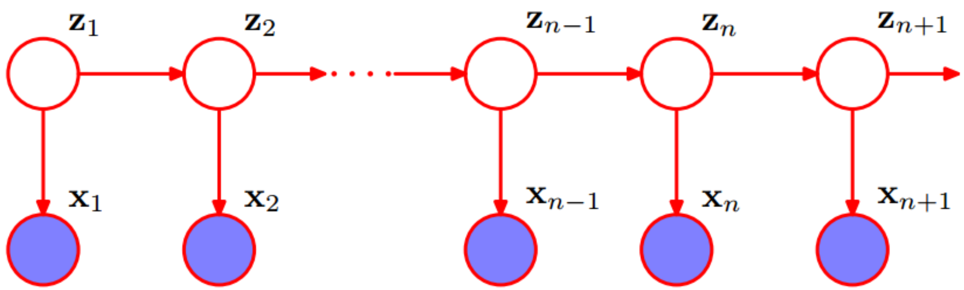


前言 |
数据 | ， | 数据 | ， | 数据 | ！ | 想 | 必在
等 | 媒介 | 的 | 持续 | 冲击 | 下 | ， | 人们
的 | 洗礼 | 。 | 现实 | 需求 | 推动 | 了 | 对
这些 | 数据 | 来 | 自于 | 社交 | 媒体 | 、 |
“ | 物联网 | ” | ） | 、 | 传感器 | 等 | 任何
大 | 多 | 数数 | 据 | 挖掘 | 的 | 宣传 | 着 |
数据 | 洪 | 水(| data flood) | 的 | 预言 |
数据 | ， | 硬件 | 推销 | 人员 | 会进 | 一步
能够 | 满足 | 处理 | 速度 | 的 | 要求 | 。 |
对 | 的 | ， | 但 | 是 | 我们 | 值得 | 停下 |
务 | 进行 | 适当 | 的 | 再 | 认识 | 。 |
近 | 年来 | ， | 数据 | 挖掘 | 和 | 机器 | 学习 | 在 | 我们 | 周围 | 持续 | 火爆 | ， | 各种 |
媒体 | 也 | 不断 | 推送 | 着 | 海量 | 的 | 数据 | 。 | 仔细 | 观察 | 就 | 能 | 发现 | ， | 实
际 | 应用 | 中 | 的 | 那些 | 机器 | 学习 | 算法 | 与 | 多 | 年前 | 并 | 没有 | 什么 | 两样 |
； | 它们 | 只 | 是 | 在 | 应用 | 的 | 数据 | 规模 | 上 | 有些 | 不同 | 。 | 历数 | 一 | 下 |
产生 | 数据 | 的 | 组织 | ， | 至少 | 在 | 我 | 看来 | ， | 数目 | 其实 | 并 | 不 | 多 | 。 |
无非 | 是 | Google | 、 | Facebook | 、 | Twitter | 、 | NetFlix | 以及 | 其 | 他 | 为数 | 不
| 多 | 的 | 机构 | 在 | 使用 | 若 | 干学 | 习算法 | 和 | 工具 | ， | 这些 | 算法 | 和 | 工具 |
使 | 得 | 他们 | 能够 | 对 | 数据 | 进行 | 测试 | 分析 | 。 | 那么 | ， | 真正 | 的 | 问题 |
是 | ： | “ | 对于 | 其 | 他人 | ， | 大数 | 据 | 框架 | 下 | 的 | 算法 | 和 | 工具 | 的 | 作用
| 是 | 什么 | 呢 | ？ | ” |
我承认 | 本书 | 将 | 多 | 次 | 提及 | 大 | 数据 | 和 | 机器 | 学习 | 之间 | 的 | 关系 | ， |
这 | 是 | 我 | 无法 | 忽视 | 的 | 一个 | 客观 | 问题 | ； | 但 | 是 | 它 | 只 | 是 | 一个 | 很
| 小 | 的 | 因素 | ， | 终极 | 目标 | 是 | 如何 | 利用 | 可用 | 数据 | 获取 | 数据 | 的 | 本质



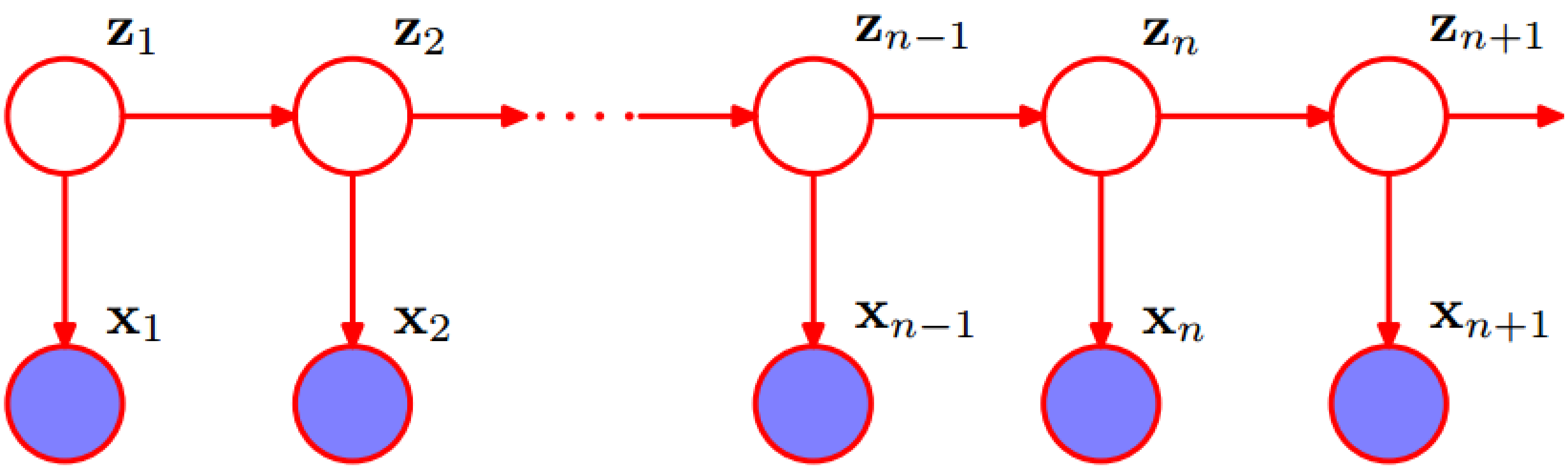
Jason Bell. *Machine Learning: Hands-On for Developers and Technical Professionals*. Wiley.2015

HMM定义



- 隐马尔科夫模型(HMM, Hidden Markov Model)可用标注问题，在语音识别、NLP、生物信息、模式识别等领域被实践证明是有效的算法。
- HMM是关于时序的概率模型，描述由一个隐藏的马尔科夫链生成不可观测的状态随机序列，再由各个状态生成观测随机序列的过程。
- 隐马尔科夫模型随机生成的状态随机序列，称为状态序列；每个状态生成一个观测，由此产生的观测随机序列，称为观测序列。
  - 序列的每个位置可看做是一个时刻。

隐马尔科夫模型的贝叶斯网络



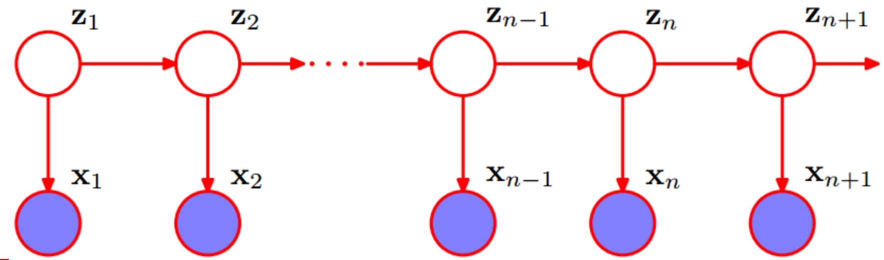
- 请思考：
  - 在z1、z2不可观察的前提下，x1和z2独立吗？x1和x2独立吗？

HMM的确定

- HMM由初始概率分布π、状态转移概率分布A以及观测概率分布B确定。

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

HMM的参数



- Q是所有可能的状态的集合
  - N是可能的状态数
- V是所有可能的观测的集合
  - M是可能的观测数

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots q_N\}$$

$$V = \{v_1, v_2, \ldots v_M\}$$

HMM的参数 $\lambda=(A,B,\pi)$

- I是长度为T的状态序列，O是对应的观测序列

$$I=\{i_1,i_2,\ldots i_T\} \qquad O=\{o_1,o_2,\ldots o_T\}$$

- A是状态转移概率矩阵

$$A=[a_{ij}]_{N\times N}$$

- 其中 $a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j|i_t=q_i)$
  - a_{ij}是在时刻t处于状态q_i的条件下时刻t+1转移到状态q_j的概率。

HMM的参数 $\lambda = (A, B, \pi)$

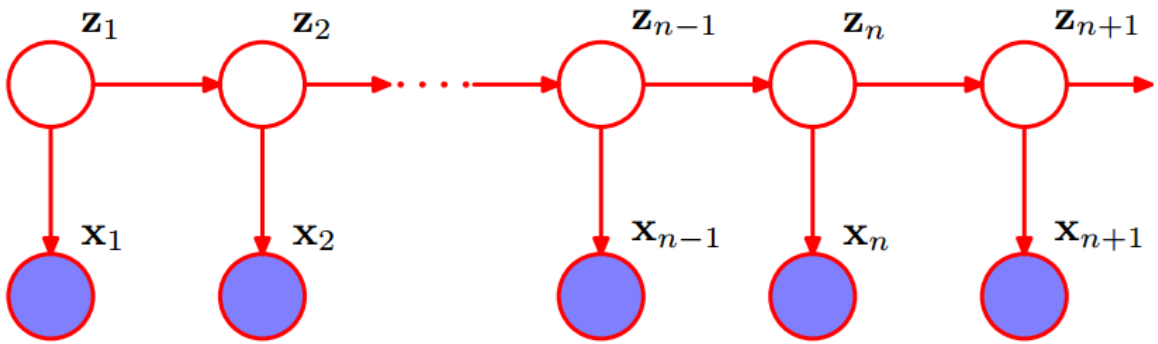
- B是观测概率矩阵 $B = [b_{ik}]_{N \times M}$
- 其中，$b_{ik} = P(o_t = v_k | i_t = q_i)$
  - b_{ik}是在时刻t处于状态q_i的条件下生成观测v_k的概率。
- π是初始状态概率向量： $\pi = (\pi_i)$
- 其中，$\pi_i = P(i_1 = q_i)$
  - π_i是时刻t=1处于状态qi的概率。

HMM的参数总结

- HMM由初始概率分布π(向量)、状态转移概率分布A(矩阵)以及观测概率分布B(矩阵)确定。π和A决定状态序列，B决定观测序列。因此，HMM可以用三元符号表示，称为HMM的三要素：

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

HMM的两个基本性质



- 齐次假设：

$$P(i_t | i_{t-1}, o_{t-1}, i_{t-2}, o_{t-2} \cdots i_1, o_1) = P(i_t | i_{t-1})$$

- 观测独立性假设：

$$P(o_t | i_T, o_T, i_{T-1}, o_{T-1} \cdots i_1, o_1) = P(o_t | i_t)$$

HMM举例

- 假设有3个盒子，编号为1、2、3，每个盒子都装有红白两种颜色的小球，数目如下：

盒子号	1	2	3
红球数	5	4	7
白球数	5	6	3

- 按照下面的方法抽取小球，得到球颜色的观测序列：
  - 按照π=(0.2,0.4,0.4)的概率选择1个盒子，从盒子随机抽出1个球，记录颜色后放回盒子；
  - 按照某条件概率(下页)选择新的盒子，重复上述过程；
  - 最终得到观测序列：“红红白白红”。

该示例的各个参数

- 状态集合：Q={盒子1，盒子2，盒子3}
- 观测集合：V={红，白}
- 状态序列和观测序列的长度T=5
- 初始概率分布π：
- 状态转移概率分布A：
- 观测概率分布B：

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

思考：

- 在给定参数π、A、B的前提下，得到观测序列“红红白白红”的概率是多少？

HMM的3个基本问题

- 概率计算问题：前向-后向算法——动态规划
  - 给定模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=\{o_1,o_2,\ldots o_T\}$，计算模型λ下观测序列O出现的概率P(O| λ)
- 学习问题：Baum-Welch算法(状态未知)——EM
  - 已知观测序列 $O=\{o_1,o_2,\ldots o_T\}$，估计模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 的参数，使得在该模型下观测序列P(O| λ)最大
- 预测问题：Viterbi算法——动态规划
  - 解码问题：已知模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=\{o_1,o_2,\ldots o_T\}$ 求给定观测序列条件概率P(I|O, λ)最大的状态序列I

概率计算问题

- 直接算法
  - 暴力算法
- 前向算法
- 后向算法
  - 这二者是理解HMM的算法重点

直接计算法

- 按照概率公式，列举所有可能的长度为T的状态序列 $I=\{i_1,i_2,\ldots i_T\}$ ，求各个状态序列I与观测序列 $O=\{o_1,o_2,\ldots o_T\}$的联合概率P(O,I|λ)，然后对所有可能的状态序列求和，从而得到P(O|λ)

直接计算法

- 状态序列 $I=\{i_1,i_2,\ldots i_T\}$ 的概率是：

$$P(I|\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{T-1}i_T}$$

- 对固定的状态序列I，观测序列O的概率是：

$$P(O|I,\lambda)=b_{i_1o_1}b_{i_2o_2}\cdots b_{i_To_T}$$

- O和I同时出现的联合概率是：

$$P(O,I|\lambda)=P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$$

直接计算法

$$P(I|\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{T-1}i_T}$$

$$P(O|I,\lambda)=b_{i_1o_1}b_{i_2o_2}\cdots b_{i_To_T}$$

- O和I同时出现的联合概率是：

$$P(O,I|\lambda)=P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)$$

$$=\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$$

- 对所有可能的状态序列I求和，得到观测序列O的概率P(O|λ)

$$P(O|\lambda)=\sum_I P(O,I|\lambda)=\sum_I P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)$$

$$=\sum_{i_1,i_2,\cdots i_T}\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$$

直接计算法分析

- 对于最终式

$$P(O|\lambda)=\sum_{I}P(O,I|\lambda)=\sum_{I}P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)$$

$$=\sum_{i_1,i_2,\cdots i_T}\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$$

- 分析：加和符号中有2T个因子，I的遍历个数为N^T，因此，时间复杂度为$O(T\,N^T)$，复杂度过高。

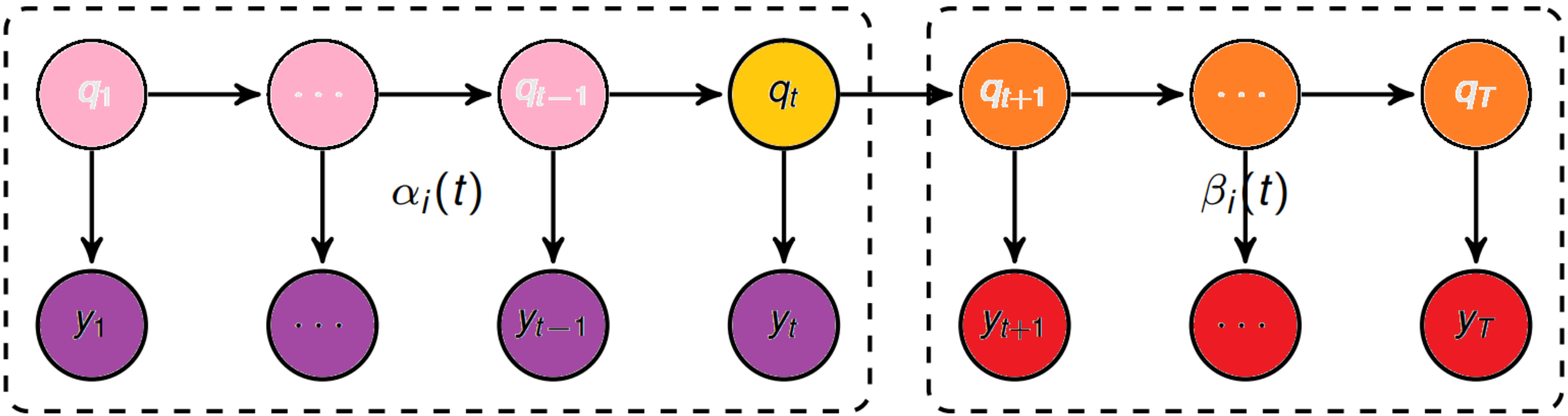
借鉴算法的优化思想

- 最长递增子序列
  - 给定一个长度为N的数组，求该数组的一个最长的单调递增的子序列(不要求连续)。
  - 数组：5, 6, 7, 1, 2, 8的LIS：5, 6, 7, 8
- 最大连续子数组
  - 给定一个长度为N的数组，求该数组中连续的一段数组(子数组)，使得该子数组的和最大。
    - 数组： 1, -2, 3, 10, -4, 7, 2, -5,
    - 最大子数组：3, 10, -4, 7, 2
- KMP中next数组的计算

模式串	a	b	a	a	b	c	a	b	a
next	-1	0	0	1	1	2	0	1	2

定义：前向概率-后向概率

$$\alpha_t(i) = P(y_1, y_2, \cdots y_t, q_t = i|\lambda) \qquad \beta_t(i) = P(y_{t+1}, y_{t+2}, \cdots, y_T|q_t = i, \lambda)$$



前向算法

- 定义：给定λ，定义到时刻t部分观测序列为o1,o2...ot且状态为qi的概率称为前向概率，记做：

$$\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, \cdots o_t, i_t = q_i | \lambda)$$

  - 可以递推计算前向概率$\alpha_t(i)$及观测序列概率$P(O|\lambda)$

前向算法 $\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, \cdots o_t, i_t = q_i | \lambda)$

- 初值： $\alpha_1(i) = \pi_i b_{io_1}$

- 递推：对于t=1,2…T-1

$$\alpha_{t+1}(i) = \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j) a_{ji} \right) b_{io_{t+1}}$$

- 最终： $P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$

前向算法 $\alpha_t(i)=P(o_1,o_2,\cdots o_t,i_t=q_i|\lambda)$

- 思考：前向算法的时间复杂度是$O(N^2T)$。

- 为什么？
  - 重点考察第二步：
  - 递推：对于t=1,2…T-1

$$\alpha_{t+1}(i)=\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)a_{ji}\right)b_{io_{t+1}}$$

例：盒子球模型

- 考察盒子球模型，计算观测向量O=“红白红”的出现概率。

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

解：盒子球模型

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

- 计算初值

$$\alpha_1(1) = \pi_1 b_{1o_1} = 0.2 \times 0.5 = 0.1$$

$$\alpha_1(2) = \pi_2 b_{2o_1} = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

$$\alpha_1(3) = \pi_3 b_{3o_1} = 0.4 \times 0.7 = 0.28$$

解

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\\0.7 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(1)=\pi_1 b_{1o_1}=0.2\times0.5=0.1$$
$$\alpha_1(2)=\pi_2 b_{2o_1}=0.4\times0.4=0.16$$
$$\alpha_1(3)=\pi_3 b_{3o_1}=0.4\times0.7=0.28$$

递推

$$\alpha_2(1)=\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_1(j)a_{j1}\right)b_{1o_2}$$
$$=(0.1\times0.5+0.16\times0.3+0.28\times0.2)\times0.5$$
$$=0.077$$

$$\alpha_2(2)=0.1104$$
$$\alpha_2(3)=0.0606$$

$$\alpha_3(1)=0.04187$$
$$\alpha_3(2)=0.03551$$
$$\alpha_3(3)=0.05284$$

解：盒子球模型

- 最终

$$\alpha_3(1) = 0.04187$$

$$\alpha_3(2) = 0.03551$$

$$\alpha_3(3) = 0.05284$$

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_3(i)$$

$$= 0.04187 + 0.03551 + 0.05284$$

$$= 0.13022$$

后向算法

- 定义：给定λ，定义到时刻t状态为qi的前提下，从t+1到T的部分观测序列为$o_{t+1}, o_{t+2} \dots o_T$的概率为后向概率，记做：

$$\beta_t(i) = P\left(o_{t+1}, o_{t+2}, \cdots o_T \middle| i_t = q_i, \lambda\right)$$

- 可以递推计算后向概率$\beta_t(i)$及观测序列概率$P(O|\lambda)$

后向算法 $\beta_t(i)=P(o_{t+1},o_{t+2},\cdots o_T|i_t=q_i,\lambda)$

- 初值： $\beta_T(i)=1$

- 递推：对于t=T-1,T-2…,1

$$\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N}\left(a_{ij}b_{jo_{t+1}}\beta_{t+1}(j)\right)$$

- 最终： $P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\pi_i b_{io_1}\beta_1(i)$

后向算法的说明

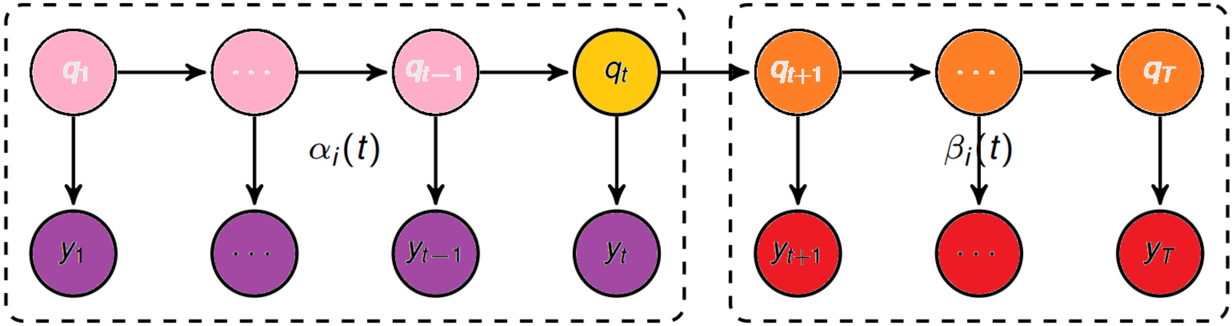
- 为了计算在时刻t状态为qi条件下时刻t+1之后的观测序列为$o_{t+1}, o_{t+2} \ldots o_T$的后向概率$\beta_t(i)$，只需要考虑在时刻t+1所有可能的N个状态qj的转移概率(a_{ij}项)，以及在此状态下的观测o_{t+1}的观测概率(b_{jot+1}项)，然后考虑状态qj之后的观测序列的后向概率$\beta_{t+1}(j)$

$$\alpha_t(i) = P(y_1, y_2, \cdots y_t, q_t = i|\lambda)$$

前向后向概率的关系

$$\beta_t(i) = P(y_{t+1}, y_{t+2}, \cdots, y_T|q_t = i, \lambda)$$

- 根据前向概率后向概率定义



$$\begin{aligned}
&P(i_t = q_i, O|\lambda) \\
&= P(O|i_t = q_i, \lambda)P(i_t = q_i|\lambda) \\
&= P(o_1, \cdots o_t, o_{t+1}, \cdots o_T|i_t = q_i, \lambda)P(i_t = q_i|\lambda) \\
&= P(o_1, \cdots o_t|i_t = q_i, \lambda)P(o_{t+1}, \cdots o_T|i_t = q_i, \lambda)P(i_t = q_i|\lambda) \\
&= P(o_1, \cdots o_t, i_t = q_i|\lambda)P(o_{t+1}, \cdots o_T|i_t = q_i, \lambda) \\
&= \alpha_t(i)\beta_t(i)
\end{aligned}$$

- 思考：试计算 $\xi_t(i, j) = P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j|O, \lambda)$

单个状态的概率 $P(i_t = q_i, O|\lambda) = \alpha_t(i)\beta_t(i)$

- 求给定模型λ和观测O，在时刻t处于状态qi的概率。
- 记：$\gamma_t(i) = P(i_t = q_i|O, \lambda)$

单个状态的概率

- 根据前向后向概率的定义，

$$P(i_t = q_i, O|\lambda) = \alpha_t(i)\beta_t(i)$$

$$\gamma_t(i) = P(i_t = q_i|O, \lambda) = \frac{P(i_t = q_i, O|\lambda)}{P(O|\lambda)}$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

γ的意义

- 在每个时刻t选择在该时刻最有可能出现的状态i_t^*，从而得到一个状态序列$I^*=\{i_1^*, i_2^* \cdots i_T^*\}$，将它作为预测的结果。
- 给定模型和观测序列，时刻t处于状态qi的概率为：

$$\gamma_t(i)=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

两个状态的联合概率

- 求给定模型λ和观测O，在时刻t处于状态qi并且时刻t+1处于状态qj的概率。

$$\xi_t(i,j) = P\left(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j \middle| O, \lambda\right)$$

两个状态的联合概率

$$\xi_t(i,j)=P\left(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j\middle|O,\lambda\right)$$

$$=\frac{P\left(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\middle|\lambda\right)}{P(O|\lambda)}$$

$$=\frac{P\left(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\middle|\lambda\right)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}P\left(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\middle|\lambda\right)}$$

$$P\left(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\middle|\lambda\right)=\alpha_t(i)a_{ij}b_{jo_{t+1}}\beta_{t+1}(j)$$

期望

- 在观测O下状态i出现的期望：

$$\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)$$

- 在观测O下状态i转移到状态j的期望：

$$\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)$$

- 思考：在观测O下状态i转移的期望是多少？

学习算法

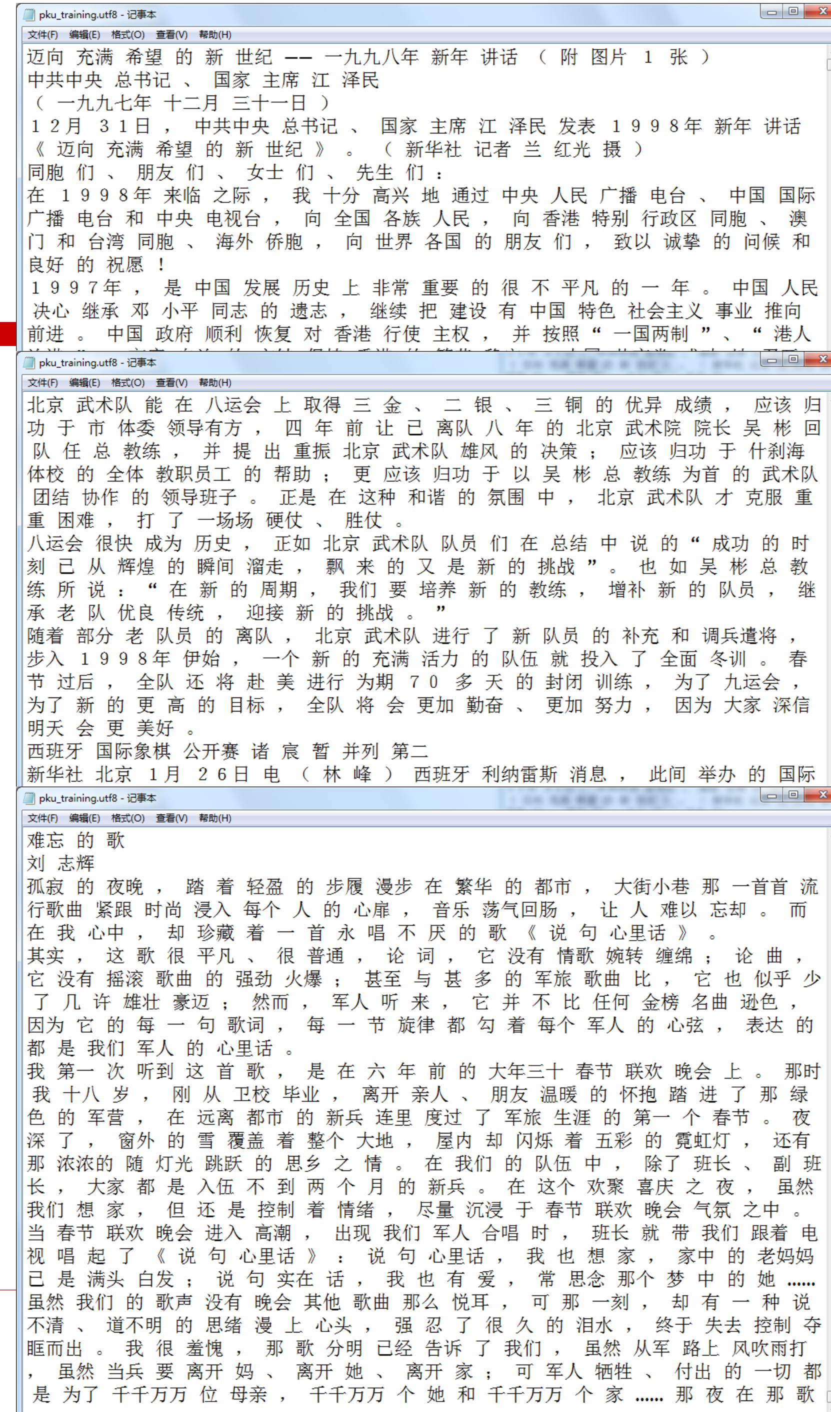
- 若训练数据包括观测序列和状态序列，则HMM的学习非常简单，是监督学习；
- 若训练数据只有观测序列，则HMM的学习需要使用EM算法，是非监督学习。

大数定理

- 假设已给定训练数据包含S个长度相同的观测序列和对应的状态序列$\{(O_1,I_1), (O_2,I_2)\ldots(O_s,I_s)\}$，那么，可以直接利用Bernoulli大数定理的结论“频率的极限是概率”，给出HMM的参数估计。

监督学习方法

- 初始概率 $\hat{\pi}_i = \dfrac{|q_i|}{\sum_i |q_i|}$
- 转移概率 $\hat{a}_{ij} = \dfrac{|q_{ij}|}{\sum_{j=1}^{N} |q_{ij}|}$
- 观测概率 $\hat{b}_{ik} = \dfrac{|s_{ik}|}{\sum_{k=1}^{M} |s_{ik}|}$



Baum-Welch算法

- 若训练数据只有观测序列，则HMM的学习需要使用EM算法，是非监督学习。

附：EM算法整体框架

Repeat until convergence {

(E-step) For each i, set

$$Q_i(z^{(i)}) := p(z^{(i)}|x^{(i)};\theta).$$

(M-step) Set

$$\theta := \arg\max_\theta \sum_i \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)};\theta)}{Q_i(z^{(i)})}$$

}

Baum-Welch算法

- 所有观测数据写成$O=(o_1,o_2...o_T)$，所有隐数据写成$I=(i_1,i_2...i_T)$，完全数据是$(O,I)=(o_1,o_2...o_T,i_1,i_2...i_T)$，完全数据的对数似然函数是$\ln P(O,I|\lambda)$
- 假设$\bar{\lambda}$是HMM参数的当前估计值，λ为待求的参数。

$$Q(\lambda,\bar{\lambda})=\sum_I \left(\ln P(O,I|\lambda)\right)P(I|O,\bar{\lambda})$$

$$=\sum_I \ln P(O,I|\lambda)\frac{P(O,I|\bar{\lambda})}{P(O,\bar{\lambda})}$$

$$\propto \sum_I \ln P(O,I|\lambda)P(O,I|\bar{\lambda})$$

EM过程

- 根据 $P(O,I|\lambda)=P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)$

$$=\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$$

- 函数可写成

$$Q(\lambda,\overline{\lambda})=\sum_I \ln P(O,I|\lambda)P(O,I|\overline{\lambda})$$

$$=\sum_I \ln \pi_{i_1} P(O,I|\overline{\lambda})$$

$$+\sum_I\left(\sum_{t=1}^{T-1}\ln a_{i_t i_{t+1}}\right)P(O,I|\overline{\lambda})$$

$$+\sum_I\left(\sum_{t=1}^{T}\ln b_{i_t o_t}\right)P(O,I|\overline{\lambda})$$

极大化

- 极大化Q，求得参数A,B,π
- 由于该三个参数分别位于三个项中，可分别极大化

$$\sum_{I} \ln \pi_{i_1} P(O, I|\overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N} \ln \pi_{i_1} P(O, i_1 = i|\overline{\lambda})$$

- 注意到πi满足加和为1，利用拉格朗日乘子法，得到：

$$\sum_{i=1}^{N} \ln \pi_i P(O, i_1 = i|\overline{\lambda}) + \gamma\left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i - 1\right)$$

初始状态概率 $\sum_{i=1}^{N}\ln\pi_i P\left(O,i_1=i\middle|\overline{\lambda}\right)+\gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i-1\right)$

- 对上式相对于πi求偏导，得到：

$$P\left(O,i_1=i\middle|\overline{\lambda}\right)+\gamma\pi_i=0$$

- 对i求和，得到：

$$\gamma=-P\left(O\middle|\overline{\lambda}\right)$$

- 从而得到初始状态概率：

$$\pi_i=\frac{P\left(O,i_1=i\middle|\overline{\lambda}\right)}{P\left(O\middle|\overline{\lambda}\right)}=\frac{P\left(O,i_1=i\middle|\overline{\lambda}\right)}{\sum_{i=1}^{N}P\left(O,i_1=i\middle|\overline{\lambda}\right)}=\gamma_1(i)$$

转移概率和观测概率

- 第二项可写成：

$$\sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \ln a_{i_t i_{t+1}} \right) P\left(O, I \middle| \overline{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \ln a_{ij} P\left(O, i_t = i, i_{t+1} = j \middle| \overline{\lambda}\right)$$

- 仍然使用拉格朗日乘子法，得到

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P\left(O, i_t = i, i_{t+1} = j \middle| \overline{\lambda}\right)}{\sum_{t=1}^{T-1} P\left(O, i_t = i \middle| \overline{\lambda}\right)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

- 同理，得到：

$$b_{ik} = \frac{\sum_{t=1}^{T} P\left(O, i_t = i \middle| \overline{\lambda}\right) I(o_t = v_k)}{\sum_{t=1}^{T} P\left(O, i_t = i \middle| \overline{\lambda}\right)} = \frac{\sum_{t=1, o_t = v_k}^{T} \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)}$$

预测算法

- 近似算法
- Viterbi算法

预测的近似算法

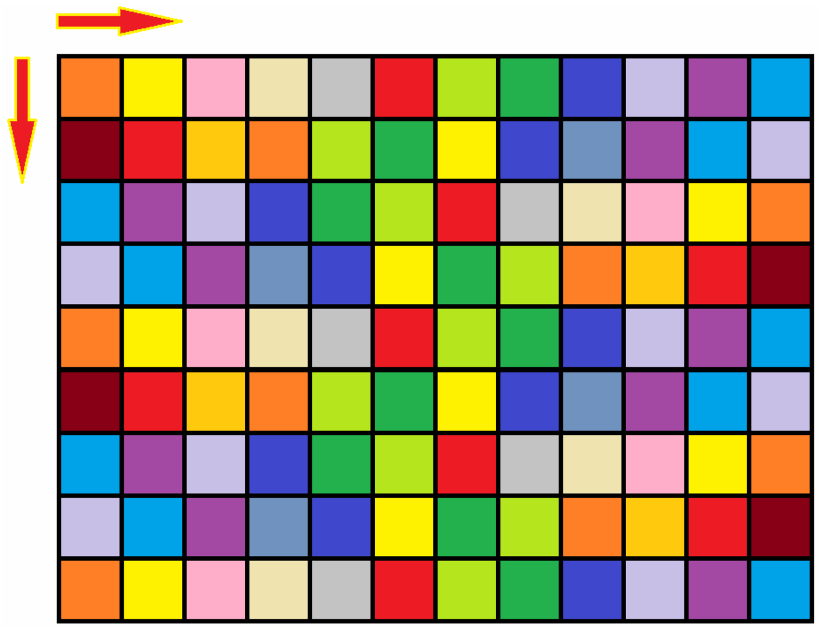
- 在每个时刻t选择在该时刻最有可能出现的状态i_t^*，从而得到一个状态序列$I^*=\{i_1^*, i_2^* \cdots i_T^*\}$，将它作为预测的结果。
- 给定模型和观测序列，时刻t处于状态qi的概率为：

$$\gamma_t(i)=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_t(i)\beta_t(i)}$$

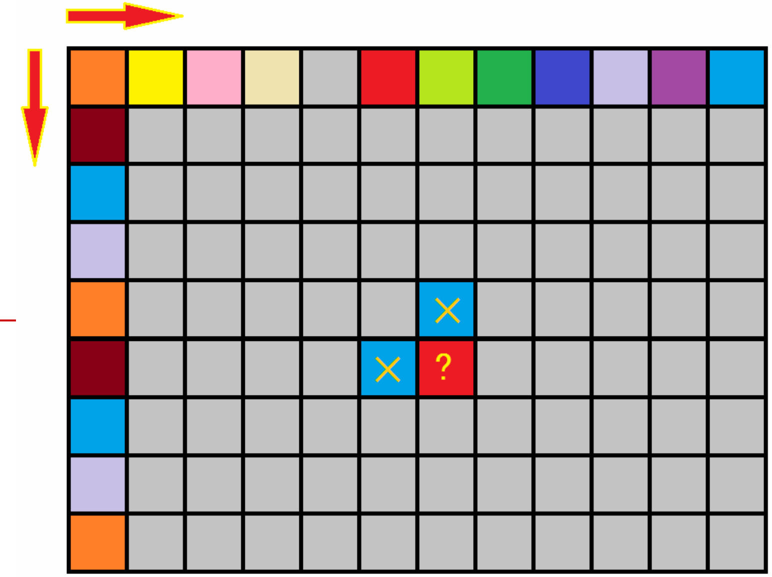
- 选择概率最大的i作为最有可能的状态
  - 会出现此状态在实际中可能不会发生的情况

算法：走棋盘/格子取数

- 给定m*n的矩阵，每个位置是一个非负整数，从左上角开始，每次只能朝右和下走，走到右下角，求总和最小的路径。



问题分析

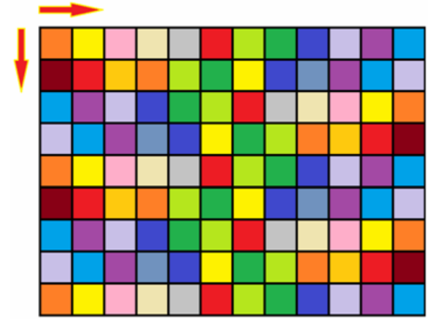


- 走的方向决定了同一个格子不会经过两次。
  - 若当前位于(x,y)处，它来自于哪些格子呢？
  - dp[0,0]=a[0,0] / 第一行(列)累积
  - dp[x,y] = min(dp[x-1,y]+a[x,y],dp[x,y-1]+a[x,y])
  - 即：dp[x,y] = min(dp[x-1,y],dp[x,y-1]) +a[x,y]
- 思考：若将上述问题改成“求从左上到右下的**最大路径**”呢？

Viterbi算法

- Viterbi算法实际是用动态规划解HMM预测问题，用DP求概率最大的路径(最优路径)，这是一条路径对应一个状态序列。
- 定义变量$\delta_t(i)$：在时刻t状态为i的所有路径中，概率的最大值。

给定m*n的矩阵，每个位置是一个非负整数，从左上角开始，每次只能朝右和下走，走到右下角，求总和最小的路径。



Viterbi算法

- 定义：

$$\delta_t(i) = \max_{i_1, i_2, \ldots i_{t-1}} P\left(i_t = i, i_{t-1}, \ldots i_1, o_t, \ldots o_1 \mid \lambda\right)$$

- 递推：

$$\delta_1(i) = \pi_i b_{io_1}$$

$$\delta_{t+1}(i) = \max_{i_1, i_2, \ldots i_t} P\left(i_{t+1} = i, i_t, \ldots i_1, o_{t+1}, \ldots o_1 \mid \lambda\right)$$

$$= \max_{1 \le j \le N} \left(\delta_t(j) a_{ji}\right) b_{io_{t+1}}$$

- 终止：

$$P^* = \max_{1 \le i \le N} \delta_T(i)$$

例

- 考察盒子球模型，观测向量O="红白红"，试求最优状态序列。

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

解：观测向量O=“红白红”

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

- 初始化：
- 在t=1时，对于每一个状态i，求状态为i观测到o1=红的概率，记此概率为$\delta_1(t)$

$$\delta_1(i) = \pi_i b_{io_1} = \pi_i b_{i红}$$

- 求得$\delta_1(1)=0.1$
- $\delta_1(2)=0.16$
- $\delta_1(3)=0.28$

解：观测向量O=“红白红” $A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\\0.7 & 0.3\end{bmatrix}$

- 在t=2时，对每个状态i，求在t=1时状态为j观测为红并且在t=2时状态为i观测为白的路径的最大概率，记概率为$\delta_2(t)$，则：

$$\delta_{t+1}(i)=\max_{1\le j\le 3}\left(\delta_1(j)a_{ji}\right)b_{io_2}=\max_{1\le j\le 3}\left(\delta_1(j)a_{ji}\right)b_{i\text{白}}$$

- 求得

$$\delta_2(1)=\max_{1\le j\le 3}\left(\delta_1(j)a_{j1}\right)b_{i\text{白}}$$

$$=\max\{0.10\times 0.5,0.16\times 0.3,0.28\times 0.2\}\times 0.5=0.028$$

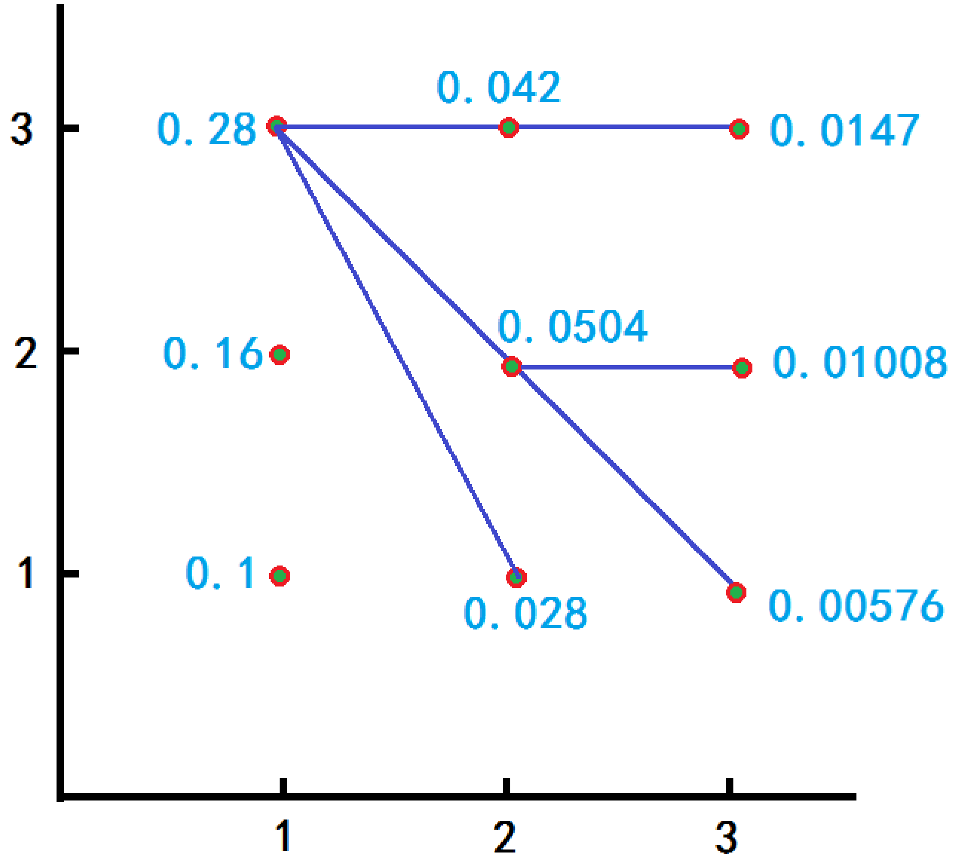
- 同理：
  - $\delta_2(2)=0.0504$
  - $\delta_2(3)=0.042$

解：观测向量O=“红白红”

- 同理，求得
- $\delta_3(1)=0.00756$
- $\delta_3(2)=0.01008$
- $\delta_3(3)=0.0147$

- 从而，最大是$\delta_3(3)= 0.0147$，根据每一步的最大，得到序列是(3,3,3)

求最优路径图解



Baum-Welch：主函数

```
def baum_welch(pi, A, B):
    f = file(".\\text\\1.txt")
    sentence = f.read()[3:].decode('utf-8') # 跳过文件头
    f.close()
    T = len(sentence)   # 观测序列
    alpha = [[0 for i in range(4)] for t in range(T)]
    beta = [[0 for i in range(4)] for t in range(T)]
    gamma = [[0 for i in range(4)] for t in range(T)]
    ksi = [[[0 for j in range(4)] for i in range(4)] for t in range(T-1)]
    for time in range(100):
        calc_alpha(pi, A, B, sentence, alpha)    # alpha(t,i):给定lamda，在时刻t的状态为i
        calc_beta(pi, A, B, sentence, beta)      # beta(t,i): 给定lamda和时刻t的状态i，观
        calc_gamma(alpha, beta, gamma)           # gamma(t,i): 给定lamda和O，在时刻t状态位
        calc_ksi(alpha, beta, A, B, sentence, ksi)    # ksi(t,i,j): 给定lamda和O，在时刻t
        bw(pi, A, B, alpha, beta, gamma, ksi, sentence) #baum_welch算法
```

前向-后向

```
def calc_alpha(pi, A, B, o, alpha):
    for i in range(4):
        alpha[0][i] = pi[i] + B[i][ord(o[0])]
    T = len(o)
    temp = [0 for i in range(4)]
    del i
    for t in range(1, T):
        for i in range(4):
            for j in range(4):
                temp[j] = (alpha[t-1][j] + A[j][i])
            alpha[t][i] = log_sum(temp)
            alpha[t][i] += B[i][ord(o[t])]
```

```
def calc_beta(pi, A, B, o, beta):
    T = len(o)
    for i in range(4):
        beta[T-1][i] = 1
    temp = [0 for i in range(4)]
    del i
    for t in range(T-2, -1, -1):
        for i in range(4):
            beta[t][i] = 0
            for j in range(4):
                temp[j] = A[i][j] + B[j][ord(o[t+1])] + beta[t+1][j]
            beta[t][i] += log_sum(temp)
```

EM迭代

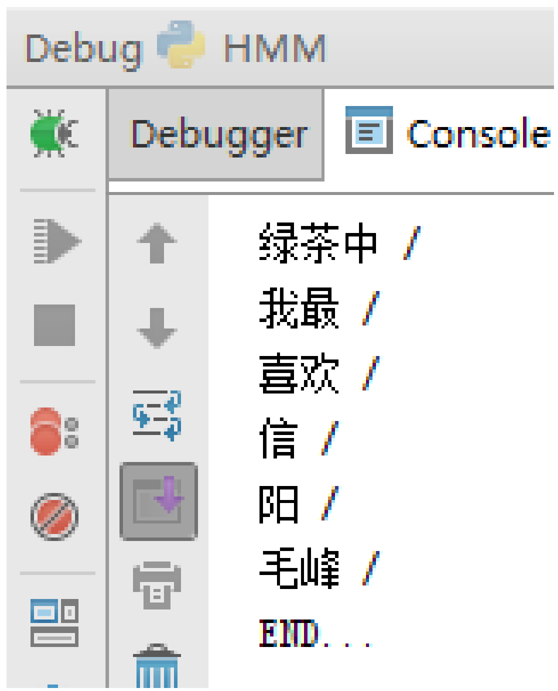
```python
def bw(pi, A, B, alpha, beta, gamma, ksi, o):
    T = len(alpha)
    for i in range(4):
        pi[i] = gamma[0][i]
    s1 = [0 for x in range(T-1)]
    s2 = [0 for x in range(T-1)]
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            for t in range(T-1):
                s1[t] = ksi[t][i][j]
                s2[t] = gamma[t][i]
            A[i][j] = log_sum(s1) - log_sum(s2)
    s1 = [0 for x in range(T)]
    s2 = [0 for x in range(T)]
    for i in range(4):
        for k in range(65536):
            valid = 0
            for t in range(T):
                if ord(o[t]) == k:
                    s1[valid] = gamma[t][i]
                    valid += 1
                s2[t] = gamma[t][i]
            if valid == 0:
                B[i][k] = infinite
            else:
                B[i][k] = log_sum(s1[:valid]) - log_sum(s2)
```

Viterbi

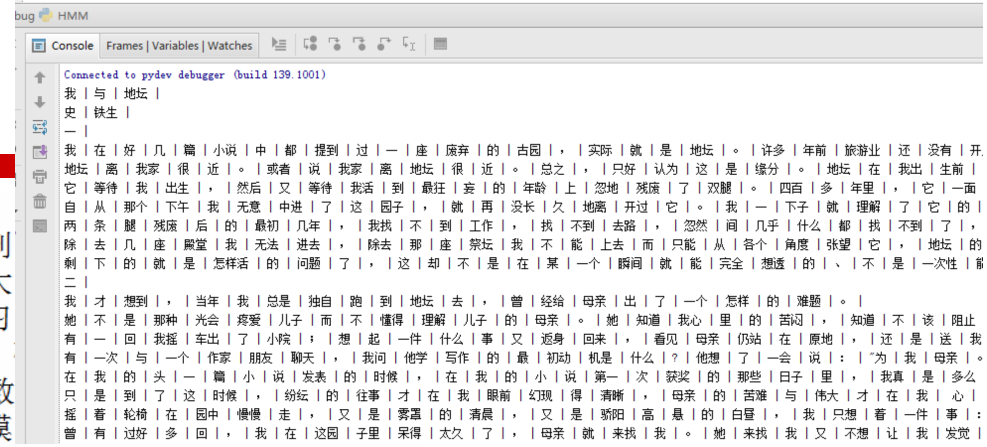
```python
def viterbi(pi, A, B, o):
    T = len(o)    # 观测序列
    delta = [[0 for i in range(4)] for t in range(T)]
    pre = [[0 for i in range(4)] for t in range(T)]  # 前一个状态
    for i in range(4):
        delta[0][i] = pi[i] + B[i][ord(o[0])]
    for t in range(1, T):
        for i in range(4):
            delta[t][i] = delta[t-1][0] + A[0][i]
            for j in range(1,4):
                vj = delta[t-1][j] + A[j][i]
                if delta[t][i] < vj:
                    delta[t][i] = vj
                    pre[t][i] = j
            delta[t][i] += B[i][ord(o[t])]
    decode = [-1 for t in range(T)]  # 解码：回溯查找最大路径
    q = 0
    for i in range(1, 4):
        if delta[T-1][i] > delta[T-1][q]:
            q = i
    decode[T-1] = q
    for t in range(T-2, -1, -1):
        q = pre[t+1][q]
        decode[t] = q
    return decode
```

Baum-Welch算法的结果

- 全国销量领先的红罐凉茶改成广州恒大
- 绿茶中我最喜欢信阳毛峰

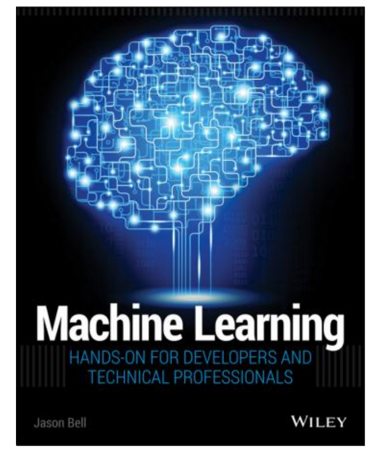


```python
if __name__ == "__main__":
    pi, A, B = load_train()
    f = file(".\\text\\novel.txt")
    data = f.read()[3:].decode('utf-8')
    f.close()
    decode = viterbi(pi, A, B, data)
    segment(data, decode)
```



HMM与中文分词

前言 |
数据 | ， | 数据 | ， | 数据 | ！ | 想 | 必在 | 新闻 | 、 | 报刊
等 | 媒介 | 的 | 持续 | 冲击 | 下 | ， | 人们 | 无法 | 摆 脱 | 大
的 | 洗礼 | 。 | 现实 | 需求 | 推动 | 了 | 对 | 数据 | 的 | 学习
这些 | 数据 | 来 | 自于 | 社交 | 媒体 | 、 | 智能 | 手机 | 、 |
“ | 物联网 | ” | ） | 、 | 传感器 | 等 | 任何 | 可以 | 产生 | 数
大 | 多 | 数数 | 据 | 挖掘 | 的 | 宣传 | 着 | 重于 | 数据 | 规模
数据 | 洪 | 水(| data flood) | 的 | 预言 | 告诉 | 人们 | 我们 | 无法 | 实时 | 处理 | 这些 |
数据 | ， | 硬件 | 推销 | 人员 | 会进 | 一步 | 卖 | 给 | 我们 | 需要 | 的 | 服务 | ， | 以期 |
能够 | 满足 | 处理 | 速度 | 的 | 要求 | 。 | 从 | 某种 | 程度 | 上来 | 说 | ， | 他们 | 是 |
对 | 的 | ， | 但 | 是 | 我们 | 值得 | 停下 | 来 | 思考 | 片刻 | ， | 并 | 对 | 手边 | 的 | 任
务 | 进行 | 适当 | 的 | 再 | 认识 | 。 |
近 | 年来 | ， | 数据 | 挖掘 | 和 | 机器 | 学习 | 在 | 我们 | 周围 | 持续 | 火爆 | ， | 各种 |
媒体 | 也 | 不断 | 推送 | 着 | 海量 | 的 | 数据 | 。 | 仔细 | 观察 | 就 | 能 | 发现 | ， | 实
际 | 应用 | 中 | 的 | 那些 | 机器 | 学习 | 算法 | 与 | 多 | 年前 | 并 | 没有 | 什么 | 两样 |
； | 它们 | 只 | 是 | 在 | 应用 | 的 | 数据 | 规模 | 上 | 有些 | 不同 | 。 | 历数 | 一 | 下 |
产生 | 数据 | 的 | 组织 | ， | 至少 | 在 | 我 | 看来 | ， | 数目 | 其实 | 并 | 不 | 多 | 。 |
无非 | 是 | Google | 、 | Facebook | 、 | Twitter | 、 | NetFlix | 以及 | 其 | 他 | 为数 | 不
| 多 | 的 | 机构 | 在 | 使用 | 若 | 干学 | 习算法 | 和 | 工具 | ， | 这些 | 算法 | 和 | 工具 |
使 | 得 | 他们 | 能够 | 对 | 数据 | 进行 | 测试 | 分析 | 。 | 那么 | ， | 真正 | 的 | 问题 |
是 | ： | “ | 对于 | 其 | 他人 | ， | 大数 | 据 | 框架 | 下 | 的 | 算法 | 和 | 工具 | 的 | 作用
| 是 | 什么 | 呢 | ？ | ” |
我承认 | 本书 | 将 | 多 | 次 | 提及 | 大 | 数据 | 和 | 机器 | 学习 | 之间 | 的 | 关系 | ， |
这 | 是 | 我 | 无法 | 忽视 | 的 | 一个 | 客观 | 问题 | ； | 但 | 是 | 它 | 只 | 是 | 一个 | 很
| 小 | 的 | 因素 | ， | 终极 | 目标 | 是 | 如何 | 利用 | 可用 | 数据 | 获取 | 数据 | 的 | 本质



Jason Bell. *Machine Learning: Hands-On for Developers and Technical Professionals*. Wiley.2014

总结

- 马尔科夫模型可以用来统一解释贪心法和动态规划。
- HMM解决标注问题，在语音识别、NLP、生物信息、模式识别等领域被广泛使用。
  - 思考：可否用深度学习代替HMM?
  - 思考：如果观测状态是连续值，可否将多项分布改成高斯分布或者混合高斯分布？
- 在一定意义下，数据比算法更重要。
- 加强算法模型和实践问题的相互转换能力。

参考文献

- 李航，统计学习方法，清华大学出版社，2012
- Christopher M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning Chapter 10. Springer-Verlag, 2006
- Radiner L,Juang B. *An introduction of hidden markov Models*. IEEE ASSP Magazine, 1986
- Lawrence R. Rabiner. *A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition*. Proceedings of the IEEE 77.2, pp. 257-286, 1989
- Jeff A. Bilmes. *A gentle tutorial of the EM algorithm and its application to parameter estimation for Gaussian mixture and hidden Markov models*. 1998.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hidden_Markov_model

我们在这里

- http://wenda.ChinaHadoop.cn
  - 视频/课程/社区
- 微博
  - @ChinaHadoop
  - @邹博_机器学习
- 微信公众号
  - 小象学院
  - 大数据分析挖掘

感谢大家！

恳请大家批评指正！